数理解析研究所講究録
第 705 巻 1989 年 46-63

量子群 $U_q(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}))$ の $q - 0$ での表現と Robinson–Schensted 対応

京都大学教養部　伊達 悦朗
京都大学理学部　神保 道夫
京都大学数理解析研究所　三輪 哲二

1. 何故 $q \to 0$ か?

2次元格子統計力学の可解模型は Yang-Baxter 方程式の解 (R-matrix と呼ぶ) によって与えられる Boltzmann weight を出発点としている。これを詳しく説明するのが本稿の目的ではないので、文献 [1] を紹介するだけにして、次のような R-matrix から話を始めたい。

$$R(x) = (1 - xq)\sum E_{\mu\mu} \otimes E_{\mu\mu} + (1-q)x \sum_{\mu<\nu} E_{\mu\mu} \otimes E_{\nu\nu} + (1-q)\sum_{\mu>\nu} E_{\mu\mu} \otimes E_{\nu\nu} + \sqrt{q}(1-x)\sum_{\mu\neq\nu} E_{\mu\nu} \otimes E_{\nu\mu} \quad (1.1)$$

ここで $q \to 0$ の極限を考えると

$$R(x)\Big|_{q=0} = x\sum_{\mu<\nu} E_{\mu\mu} \otimes E_{\nu\nu} + \sum_{\mu\geq\nu} E_{\mu\mu} \otimes E_{\nu\nu}$$

である。

次の三つが成り立っている。

(i) $q \to 0$ で $R(x)$ は diagonal
(ii) 固有値は x^H ($H = 0$ or 1)
(iii) $H = 0$ or $1 \Leftrightarrow \mu \geq \nu$ or $\mu < \nu$

これらは、対応する格子模型の状態確率を corner transfer matrix 法により計算する時の出発点になる。従って、与えられた R-matrix に対して、

$q \to 0$ の極限を計算する方法を開発する必要がある。一般に Lie 環 $\mathfrak{g}$ の q-deformation $U_q(\mathfrak{g})$ の表現 V を考える時、対応する R-matrix は $R(x) \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V \otimes V)$ であって、さらに

$$[R(x), \Delta(X)] = 0 \qquad {}^\forall X \in U_q(\mathfrak{g})$$

という性質を持つ。最初に挙げた例では

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}), \quad V = \oplus_\mu \mathbf{C} v_\mu \quad v_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \mu$$

は $U_q(\mathfrak{g})$ の n 次元表現であった。以下 V と書いたら、この意味である。$q = 1$ の "classical" な場合で言えば、$R(x)$ が $\Delta(X)$ と可換になるという事は、次のような性質を意味する。

$$V \otimes V = V_{\Box\Box} \oplus V_{\substack{\Box \\ \Box}}$$

を既約表現への分解とする。すなわち

$$V_{\Box\Box} = \oplus_{\mu \geq \nu} \mathbf{C}(v_\mu \otimes v_\nu + v_\nu \otimes v_\mu)$$
$$V_{\substack{\Box \\ \Box}} = \oplus_{\mu < \nu} \mathbf{C}(v_\mu \otimes v_\nu - v_\nu \otimes v_\mu)$$

を対称テンソル 及び 反対称テンソルの空間とする。この時 $R(x)$ が $\Delta(X)$ と可換であれば $R(x)$ は

$$V_{\Box\Box}, \quad V_{\substack{\Box \\ \Box}}$$

各々の上でスカラーになる。実際

$$P_{\Box\Box}, \quad P_{\substack{\Box \\ \Box}}$$

を、それぞれへの直交射影とすれば

$$R(x)\,\Big|_{q=1} = (1 - x)P_{\Box\Box} + (x - 1)P_{\substack{\Box \\ \Box}}$$

となっている。

q が はいった形での既約分解は次のようになる。

$$V_{\square\square} = \oplus_{\mu\geq\nu}\mathbf{C}(v_\mu\otimes v_\nu + \sqrt{q}v_\nu\otimes v_\mu) \tag{1.2}$$

$$V_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}} = \oplus_{\mu<\nu}\mathbf{C}(v_\mu\otimes v_\nu - \sqrt{q}v_\nu\otimes v_\mu) \tag{1.3}$$

$$R(x) = (1-xq)P_{\square\square} + (x-q)P_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}$$

ところで、このように $R(x)$ の スペクトル分解が書けていれば、$q\to 0$ の計算は容易に実行できて

$$V_{\square\square}\Big|_{q=0} = \oplus_{\mu\geq\nu}\mathbf{C}(v_\mu\otimes v_\nu)$$

$$V_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}\Big|_{q=0} = \oplus_{\mu<\nu}\mathbf{C}(v_\nu\otimes v_\mu)$$

$$R(x)\Big|_{q=0} = P_{\square\square}\Big|_{q=0} + xP_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}\Big|_{q=0}$$

となる。$R(x)$ が複雑な場合 (1.1) のような具体的な表示から $q\to 0$ の極限を計算するのは容易ではないので、この方法は役に立つ。こうして、次の問題が生じた。

$V = \oplus_\mu \mathbf{C}v_\mu$ を $U_q(\mathfrak{g})$ の n 次元表現とする時 $\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{N}$ の既約分解の様子を $q\to 0$ で記述せよ。

我々は、Pasquier [2] による q-Wigner 係数を用いてこの問題を扱ってみて、思いがけず、答えが Robinson–Schensted 対応によって記述されることを見い出した。(論文 [3] を参照。) この計算を始めたのは 1988 年の暮であったが、そのしばらく前に、数理研の研究集会において、寺田、松沢両氏による Robinson–Schensted 対応 の話を聞くことができたのは、全くの幸運であった。

2. $V\otimes V\otimes V$ の分解

この節では、q-Wigner 係数を用いずに直接の計算によって $V\otimes V\otimes V$ の既約分解を実行して見せよう。

$V\otimes V$ から復習する。(1.1)–(1.3) から簡単な計算で

$$V_{\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline\end{array}} = \mathrm{Ker}\ R(q^{-1}) \tag{2.1}$$

$$V_{\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}} = \mathrm{Ker}\ R(q) \tag{2.2}$$

である。逆に、(2.1),(2.2) を知っていれば、(1.2),(1.3) はすぐに求められる。

$V\otimes V\otimes V$ を既約分解する仕方は、重複度があって unique ではない。ひとつの方法は左から右へ順次 $\otimes V$ を分解していく。すなわち

$$\begin{aligned}
V\otimes V\otimes V &\cong (V\otimes V)\otimes V\\
&\cong \left(V_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline\end{array}}\oplus V_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline\end{array}}\right)\otimes V\\
&\cong V_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline\end{array}}\otimes V\oplus V_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline\end{array}}\otimes V\\
&\cong \left(V_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\ \hline\end{array}}\oplus V_{\begin{array}{|c|c}\hline 1&\multicolumn{1}{c|}{2}\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}}\right)\oplus\left(V_{\begin{array}{|c|c}\hline 1&\multicolumn{1}{c|}{3}\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array}}\oplus V_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline 3\\ \hline\end{array}}\right)
\end{aligned}$$

この分解は、R-matrix を使うと、次のように特徴づけられる。

(記号の説明)

$V\otimes V\otimes V$ に作用する $R(x)\otimes 1, 1\otimes R(x)$ をそれぞれ $R^{12}(x)$, $R^{23}(x)$ と書く。

(特徴づけ)

$$\begin{aligned}
V_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\ \hline\end{array}} &= \left(V_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline\end{array}}\otimes V\right)\cap \mathrm{Ker}R^{23}(q^{-1})\\
V_{\begin{array}{|c|c}\hline 1&\multicolumn{1}{c|}{2}\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}} &= \left(V_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline\end{array}}\otimes V\right)\cap \mathrm{Ker}R^{12}(q)R^{23}(q^{2})\\
V_{\begin{array}{|c|c}\hline 1&\multicolumn{1}{c|}{3}\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array}} &= \left(V_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline\end{array}}\otimes V\right)\cap \mathrm{Ker}R^{12}(q^{-1})R^{23}(q^{-2})\\
V_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline 3\\ \hline\end{array}} &= \left(V_{\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline\end{array}}\otimes V\right)\cap \mathrm{Ker}R^{23}(q)
\end{aligned}$$

この特徴づけを使って計算すれば、既約成分の具体的表示が次のように求められる。

(記号の説明)

λ, μ, ν は 1 から n までの自然数を表わし、ひとつの式の中にそれらが同時に現われる時、$\lambda > \mu > \nu$ と仮定する。さらに、テンソル積について次のように略記する。例えば $v_\lambda \otimes v_\nu \otimes v_\mu \to \lambda\nu\mu$ 。

$V_{\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}}$ の基底

$$\begin{aligned}
&\lambda\mu\nu + \sqrt{q}(\lambda\nu\mu + \mu\lambda\nu) + q(\nu\lambda\mu + \mu\nu\lambda) + q\sqrt{q}\nu\mu\lambda \\
&\lambda\lambda\mu + \sqrt{q}\lambda\mu\lambda + q\mu\lambda\lambda \\
&\lambda\mu\mu + \sqrt{q}\mu\lambda\mu + q\mu\mu\lambda \\
&\lambda\lambda\lambda
\end{aligned}$$

$V_{\substack{\boxed{1}\boxed{2}\\ \boxed{3}\phantom{\boxed{2}}}}$ の基底

$$\begin{aligned}
&\mu\nu\lambda + \sqrt{q}(\nu\mu\lambda - \lambda\nu\mu) - q\nu\lambda\mu \\
&\lambda\nu\mu + \sqrt{q}(\nu\lambda\mu - \lambda\mu\nu) - q\mu\lambda\nu \\
&\lambda\mu\lambda + \sqrt{q}\mu\lambda\lambda - \sqrt{q}(1+q)\lambda\lambda\mu \\
&(1+q)\mu\mu\lambda - q\lambda\mu\mu - q\sqrt{q}\mu\lambda\mu
\end{aligned}$$

$V_{\substack{\boxed{1}\boxed{3}\\ \boxed{2}\phantom{\boxed{3}}}}$ の基底

$$\begin{aligned}
&-\mu\lambda\nu + \sqrt{q}(\lambda\mu\nu - \nu\lambda\mu) + q\lambda\nu\mu \\
&-\nu\lambda\mu + \sqrt{q}(\lambda\nu\mu - \nu\mu\lambda) + q\mu\nu\lambda \\
&-\mu\lambda\lambda + \sqrt{q}\lambda\mu\lambda \\
&-\mu\lambda\mu + \sqrt{q}\lambda\mu\mu
\end{aligned}$$

$V_{\substack{\boxed{1}\\ \boxed{2}\\ \boxed{3}}}$ の基底

$$-\nu\mu\lambda + \sqrt{q}(\mu\nu\lambda + \nu\lambda\mu) - q(\lambda\nu\mu + \mu\lambda\nu) + q\sqrt{q}\lambda\mu\nu$$

$V \otimes V \otimes V$ という簡単な場合すら、このように複雑であるが、$q \to 0$ の極限を考えると簡単化される。

$V_{\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}}\big|_{q=0}$ の基底 ：$\lambda\mu\nu, \lambda\lambda\mu, \lambda\mu\mu, \lambda\lambda\lambda$

$V_{\ytableaushort{12,3}}\Big|_{q=0}$ の基底 $:\mu\nu\lambda, \lambda\nu\mu, \lambda\mu\lambda, \mu\mu\lambda$

$V_{\ytableaushort{13,2}}\Big|_{q=0}$ の基底 $:\mu\lambda\nu, \nu\lambda\mu, \mu\lambda\lambda, \mu\lambda\mu$

$V_{\ytableaushort{1,2,3}}\Big|_{q=0}$ の基底 $:\nu\mu\lambda$

あるいは $q=\infty$ でも簡単である。

$V_{\ytableaushort{123}}\Big|_{q=\infty}$ の基底 $:\nu\mu\lambda,\quad \mu\lambda\lambda,\quad \mu\mu\lambda,\quad \lambda\lambda\lambda$

$V_{\ytableaushort{12,3}}\Big|_{q=\infty}$ の基底 $:\nu\lambda\mu,\quad \mu\lambda\nu,\quad \lambda\lambda\mu,\quad \mu\lambda\mu$

$V_{\ytableaushort{12,3}}\Big|_{q=0}$ の基底 $:\lambda\nu\mu,\quad \mu\nu\lambda,\quad \lambda\mu\lambda,\quad \lambda\mu\mu$

$V_{\ytableaushort{1,2,3}}\Big|_{q=\infty}$ の基底 $:\lambda\mu\nu$

何が簡単かというと、$q = 0$ (or ∞) では既約成分は $v_\alpha \otimes v_\beta \otimes v_\gamma$ $(1 \le \alpha, \beta, \gamma \le n)$ の形の vector で張られている。それでは $v_\alpha \otimes v_\beta \otimes v_\gamma$ を

$$\ytableaushort{123}\ ,\qquad \ytableaushort{12,3}\ ,\qquad \ytableaushort{13,2}\ ,\qquad \ytableaushort{1,2,3}$$

に分類する規則は何か。この答は、次節において $\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{N}$ という一般の場合に述べる。

3. $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{N}$ の分解

まず分解を定義しよう。桝目の数が N の Young 図形の全体を $\mathcal{Y}_N$ と書く。

$$\mathcal{Y}_2 = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline \; \\ \hline \; \\ \hline \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{Y}_3 = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \; & \; & \; \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline \; \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline \; \\ \hline \; \\ \hline \; \\ \hline \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{Y}_4 = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \; & \; & \; & \; \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \; & \; & \; \\ \hline \; \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline \; & \; \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline \; \\ \cline{1-1} \; \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline \; \\ \hline \; \\ \hline \; \\ \hline \; \\ \hline \end{array} \right\},$$

である。$Y \in \mathcal{Y}_N$ に対して、Y の桝目毎に 1 から N までの数を右方向および下方向に増大するように並べたものを Y を台とする標準盤と呼び、その全体を $\mathcal{T}(Y)$ と書く。例えば

$$\mathcal{T}\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline \; & \; & \; \\ \hline \; & \; \\ \cline{1-2} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2} \end{array} \right\}$$

標準盤 $P \in \mathcal{T}(Y)$ と、空図形を始点、Y を終点とする Young 図形の増大列とは一対一に対応する。例えば

$$P = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

は

$$\phi \longrightarrow \begin{array}{|c|}\hline \; \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline \; \\ \cline{1-1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline \; & \; & \; \\ \hline \; \\ \cline{1-1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline \; & \; & \; \\ \hline \; & \; \\ \cline{1-2} \end{array}$$

に対応している。

$\mathcal{Y}_N^{(n)}$ で深さが n 以下の図形からなる $\mathcal{Y}_N$ の部分集合を表す。$q = 1$ の場合には、$Y \in \mathcal{Y}_N^{(n)}$ に対して $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ の既約表現が対応していることはよく知られているが、1 のべき根でない q に対しては、同様の事実が成

り立つ。$Y \in \mathcal{Y}_N^{(n)}$, $P \in \mathcal{T}(Y)$ とすると、P に対応して $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{N}$ の $U_q\left(\mathfrak{gl}(n, \mathrm{C})\right)$ についての既約部分空間 $V(P)$ が 次の手順で inductive に決まる。

$$P = \{\phi \to Y_1 = \square \to \cdots \to Y_{n-1} \to Y_n = Y\}$$

に対し、$P' \in \mathcal{Y}_N{}^{(n-1)}$ を Y_{n-1} に P と同じ数を入れて作った標準盤とする。$V(P')$ が $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{N-1}$ の中に与えられたとして、$V(P)$ を

$$V(P) \subset V(P') \otimes V \subset (\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{N-1}) \otimes V$$

であって、Y に対応する既約表現と同型な部分空間であると定めてやる。これにより

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{N} = \bigoplus_{\substack{P \in \mathcal{S}(Y) \\ Y \in \mathcal{Y}_N^{(n)}}} V(P)$$

と言う既約表現への分解を得る。我々の定理はこの分解が $q = 0$ (or ∞) でどうなるかを記述する。

⟨定理⟩

(i) $V(P)\big|_{q=0}$ $\left(\text{resp.}\ \ V(P)\big|_{q=\infty}\right)$ は $v_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes v_{\alpha_N}$ の形のベクトルで張られている。

(ii) $v_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes v_{\alpha_N} \in V(P)\big|_{q=0}$ $\left(\text{resp.}\ \ V(P)\big|_{q=\infty}\right)$ となるための必要十分条件は $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ への左から (resp. 上から) の insertion で P が得られることである。

(insertion の定義)

(1) 準標準盤

$Y \in \mathcal{Y}_N^{(n)}$ に対して、Y の桝目毎に 1 から n までの自然数を重複も許して、ただし右方向には非減少、下方向には真に増大となるように並べたものを Y を台とする準標準盤と呼び、その全体を $\mathcal{S}(Y)$ と書く。例えば $n = 3$ の時

$$\mathcal{S}\left(\ \yng(2,1)\ \right) =$$

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \right\}$$

(2) 左からの insertion

$Q \in \mathcal{S}(Y)$ $(Y \in \mathcal{Y}_N{}^{(k)})$ と α $(1 \le \alpha \le n)$ が与えられた時、次のようにして $Q' \in \mathcal{S}(Y)$ $(Y' \in \mathcal{Y}_N{}^{(k+1)})$ を作る手続きを左からの insertion と呼ぶ。

(i) Q を縦の列の集まり $\{q_1, q_2, \ldots, q_J\}$ と考える。各列 q_I には上から下へ 1 以上 n 以下の自然数が真に増大して並べられている。

(ii) 列 q に対して 1 から n までの自然数 α をぶつけて、列 q' と自然数 α' の組を得る手続きを次のように定める。q における自然数の並びを $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ とする。(k は列 q の長さ) もし $\alpha_k < \alpha$ ならば q の下に桝目を一つ増やし、そこに α を書き込んだものを q' とする。また $\alpha' = 0$ と定義する。そうでない時は j を $\alpha_{j-1} < \alpha \le \alpha_j$ ($\alpha_0 = 0$ と規約) によって定める。q の j 番目の桝目に書かれた自然数 α_j を α に書き換えたものを q' とし(q と q' とは長さが等しい)、$\alpha' = \alpha_j$ とする。

(iii) Q と α から Q' を作ろう。q_1 に α をぶつけて q_1' と α_1' を作る。α_1' が 0 であれば、Q' は q_1 が q_1' に変化したものとする。そうでないときは q_2 に α_1' をぶつけ q_2' と α_2' を作る。α_2' が 0 であれば、Q' は q_1, q_2 を q_1', q_2' に変更したものとする。以下この手続きを繰り返して Q' を得る。

(例)

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

に左から 2 をぶつけると

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

を得る。

(3) 上からの insertion

$Q \in \mathcal{S}(Y)$ $(Y \in \mathcal{Y}_N{}^{(k)})$ と α $(1 \le \alpha \le n)$ が与えられた時、$Q' \in \mathcal{S}(Y)$ $(Y' \in \mathcal{Y}_N{}^{(k+1)})$ を作る.

(i) Q を横の列の集まり $\{p_1, p_2, \ldots, p_J\}$ と考える。各列 p_I には左から右へ 1 以上 n 以下の自然数が重複を許して、非減少に並べられている。

(ii) 横の列 p に上から α をぶつけて p' と α' を作る。p の並びを $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ とする時、$\alpha_k \leq \alpha$ ならば p の右端に桝目を一つ増やしてそこに α を書き入れたものを p' とし $\alpha' = 0$ とする。そうでない時は $\alpha_{j-1} \leq \alpha < \alpha_j$ となる j に対し、p において α_j を α に書き換えたものを p' とし $\alpha' = \alpha_j$ とする。

(iii) 左からの insertion の時と同様に、上から α をぶつけて、Q の横の列を改変し、$\alpha' = 0$ となるまで続けて得られるものを Q' とする。

(例)

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

に上から 2 をぶつけると

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline\end{array}$$

を得る。

(4) $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ の左からの insertion で P が得られると言う表現は、正確には次の事を意味する。ϕ に左から α_1 を insert して標準盤 P_1 を得る。次に P_1 に α_2 を左から insert して P_2 を得る。これを繰り返して P_{n-1} に α_n を左から insert して得られた P_n が P になると言うことである。

(例)

$V \otimes V \otimes V$ において

$$V_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}}\Big|_{q=0}$$

に属する vectors がどれだけあるかを考えてみる。

$$v_{\alpha_1} \otimes v_{\alpha_2} \otimes v_{\alpha_3} \in V_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}}\Big|_{q=0}$$

となるためには左からの insertion が

$$\phi \xrightarrow{\alpha_1} \begin{array}{|c|}\hline \alpha_1 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{\alpha_2} \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha_2 & \alpha_1 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{\alpha_3} \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha_2 & \alpha_1 \\ \hline \alpha_3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

となることが必要十分である。従って $\alpha_2 \leq \alpha_1$ かつ $\alpha_2 > \alpha_3$ 。従って前節の記号法で $\lambda\,\nu\,\mu$, $\mu\,\nu\,\lambda$, $\mu\,\mu\,\lambda$, $\lambda\,\mu\,\lambda$ の 4 種が答である。

N を正の整数とし、W_N を 1 から N までの文字からなる長さ N の語の集合とする。上記 (4) の操作により (上または左からの insertion を通して)、各語 $w \in W_N$ に対して、同じ形の標準盤と準標準盤が定まる。つまり次の写像が定まる。

$$W_N \longrightarrow \coprod_{Y \in \mathcal{Y}_N^{(n)}} \mathcal{S}(Y) \times \mathcal{T}(Y).$$

この対応は全単射であることが知られており、Robinson–Schensted 対応と呼ばれている。本講究録の寺田氏の記事 [4] を参照のこと。我々の定理は、Robinson–Schensted 対応に対する、意味のはっきりした別証を与えるものである。

4. $U_q(\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C}))$ と Gelfand–Tsetlin 基

以下ではこれまでにでてきた幾つかの概念（リー環 $\mathfrak{g}$ の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の q-deformation, q-Wigner 係数など）の定義を与えつつ、ここまでの記述への補足を加える。事の順序上リー環 $\mathfrak{g}$, 以下では $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})$, $n \geq 2$, の包絡環の q-deformation $U_q(\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C}))$ の定義より始める。

$\underline{U_q(\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C}))}$

q を 0 又は ± 1 でない複素数とする。$U_q = U_q(\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C}))$ は単位元 1 を持ち、生成元 $\{X_j^{\pm}\}_{1 \leq j \leq n-1}$, $\{q^{\pm\varepsilon_j/2}\}_{1 \leq j \leq n}$ により生成される結合的な $\mathbf{C}$- 代数で、生成元は次の関係式をみたす。

$$\begin{aligned}
q^{\varepsilon_i/2}q^{-\varepsilon_i/2} &= q^{-\varepsilon_i/2}q^{\varepsilon_i/2} = 1, \qquad q^{\varepsilon_i/2}q^{\varepsilon_j/2} = q^{\varepsilon_j/2}q^{\varepsilon_i/2},\\
q^{\varepsilon_i/2}X_j^{\pm}q^{-\varepsilon_i/2} &= q^{\pm 1/2}X_j^{\pm} \quad \text{for} \quad i = j,\\
&= q^{\mp 1/2}X_j^{\pm} \quad \text{for} \quad i = j+1,\\
&= X_j^{\pm} \qquad \text{otherwise},\\
[X_i^{+}, X_j^{-}] &= \delta_{ij}\frac{q^{H_i} - q^{-H_i}}{q - q^{-1}}, \qquad H_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1},\\
(X_i^{\pm})^2 X_j^{\pm} - (q + q^{-1})X_i^{\pm}X_j^{\pm}X_i^{\pm} &+ X_j^{\pm}(X_i^{\pm})^2 = 0 \quad \text{for} \quad |i-j| = 1,\\
X_i^{\pm}X_j^{\pm} &= X_j^{\pm}X_i^{\pm} \quad \text{for} \quad |i-j| \geq 2.
\end{aligned}$$

U_q には更に Hopf 代数の構造が入ることが知られている。特に余積 Δ : $U_q \longrightarrow U_q \otimes U_q$ は次の式で与えられる。

$$\Delta(q^{\varepsilon_j/2}) = q^{\varepsilon_j/2} \otimes q^{\varepsilon_j/2},$$
$$\Delta(X_j^{\pm}) = X_j^{\pm} \otimes q^{-H_j/2} + q^{H_j/2} \otimes X_j^{\pm}.$$

この余積を通じて U_q− 加群のテンソル積が定義される。つまり $(\pi_i, V_i), i = 1, 2,$ を U_q− 加群とするとき、$V_1 \otimes V_2$ への U_q− 作用を合成

$$U_q \xrightarrow{\Delta} U_q \otimes U_q \xrightarrow{\pi_1 \otimes \pi_2} \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)$$

により定義することにより、$V_1 \otimes V_2$ は U_q− 加群となる。又、q が一般の時（特に $|q| \neq 1$ であれば十分）、U_q の n 次元表現のいくつかのテンソル積は完全可約であることも知られている。以下では $0 < q, q \neq 1$ とする。

まず有限次元既約 U_q− 加群及びその基底を記述するために次の概念を導入する。

Gelfand-Tsetlin pattern

整数の配列

$$|m\rangle = (m_{ij})_{1 \le i \le j \le n} = \begin{array}{ccccccc} m_{1n} & & m_{2n} & & \cdots & & m_{nn} \\ & m_{1n-1} & & \cdots & & m_{n-1n-1} & \\ & & & \cdots & & & \\ & & m_{12} & & m_{22} & & \\ & & & m_{11} & & & \end{array}$$

が条件

$$m_{i\,j+1} \ge m_{ij} \ge m_{i+1\,j+1} \qquad \text{for all } 1 \le i \le j \le n-1 \tag{4.1}$$

を満たすとき、Gelfand-Tsetlin (GT) pattern と呼ぶ。以下 $m_{nn} \ge 0$ と仮定し、GT pattern $|m\rangle$ の一行め $[m_{1n}, m_{2n}, \cdots, m_{nn}]$ は Young 図形の符号数を表しているとみなす。この Young 図形を $|m\rangle$ の形と呼ぶ。（以下 Young 図形とその符号数を同一視する）。$GT(Y)$ で形が Young 図形 Y の GT pattern の集合を表すことにする。

続いて $GT(Y)$ から $\mathcal{S}(Y)$ への写像 τ を定義しよう。$|m\rangle \in GT(Y)$ に対し $Y_i \in \mathcal{Y}_{N_i}^{(i)}$ $(N_i = m_{i1} + \cdots + m_{ii})$ を $Y_i = [m_{i1}, \ldots, m_{ii}]$ で定義する。この時 $Y_i \supset Y_{i-1}$ となる。各 i に対し $Y_i \setminus Y_{i-1}$ の桝目に i を書き込んで、$Y = Y_n$ を台とする準標準盤が得られる。これを $\tau(|m\rangle)$ とする。

$U_q(\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C}))$ の有限次元既約表現[5]

既に述べたように、q が generic の時 $U_q = U_q(\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C}))$ の有限次元既約表現は $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})$ の場合と同様に、深さが n 以下の Young 図形でパラメトライズされる。
Young 図形 $Y = [f_1,\cdots,f_n]$ に対し V_Y を $GT(Y)$ に属する GT pattern の $\mathbf{C}$ 係数一次結合全体とする。V_Y 上に $\mathbf{C}$- 双一次形式 $(\ ,\ )$ を $(|m\rangle,|m'\rangle) = \delta_{m\,m'}$ により導入する。

U_q の生成元の GT pattern への作用を

$$q^{\varepsilon_j/2}|m\rangle = q^{w_j(m)/2}|m\rangle, \qquad w_j(m) = \sum_{i=1}^{j} m_{ij} - \sum_{i=1}^{j-1} m_{i\,j-1},$$
$$X_j^+|m\rangle = \sum_{m'}{}^{(j)} c_j(m',m)|m'\rangle, \qquad X_j^-|m\rangle = \sum_{m'}{}^{(j)} c_j(m,m')|m'\rangle$$

で定義する。ここで $\sum^{(j)}$ は j 以外の b に対しては $m'_{ab} = m_{ab}$ であるような m' にわたる和を表す。係数 $c_j(m,m')$ はある i に対して $m'_{ij} = m_{ij} - 1$ で、(i,j) 以外の (a,b) に対しては $m'_{ab} = m_{ab}$ であるような m' に対してのみ 0 でない。0 でない係数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} l''_k &= m_{k\,j+1} - k & \quad 1 \le k \le j+1, \\ l_k &= m_{kj} - k & \quad 1 \le k \le j, \\ l'_k &= m_{k\,j-1} - k & \quad 1 \le k \le j-1 \end{aligned}$$

とおけば、0 でない係数は $m'_{ij} = m_{ij} - 1$ として

$$c_j(m,m') = \left(- \frac{\prod_{k=1}^{j-1}[l'_k - l_i]_q \prod_{k=1}^{j+1}[l''_k - l_i + 1]_q}{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{j} [l_k - l_i]_q [l_k - l_i + 1]_q} \right)^{\frac{1}{2}}$$

で与えられる。ここで $\nu \in \mathbf{C}$ に対し

$$[\nu]_q = \frac{q^\nu - q^{-\nu}}{q - q^{-1}}.$$

とおいた。m または m' が GT pattern の条件 (4.1) をみたさないときは $c_j(m,m') = 0$ である。また $w_j(m)$ は準標準盤 $\tau(|m\rangle)$ 上に書かれた j の

個数を表していることを注意しておく。更にこのように作用を定義するとき X_j^+ と X_j^- の作用は互いに反傾である。$(X_j^+|m'\rangle, |m\rangle) = (|m'\rangle, X_j^-|m\rangle)$ 。

以上の作用により V_Y は既約 U_q- 加群となり、その最高ウエイトベクトル v_Y は

$$v_Y = \begin{array}{ccccccc} f_1 & & f_2 & \cdots & f_{n-1} & & f_n \\ & f_1 & & f_2 \cdots & & f_{n-1} & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & f_1 & & & \end{array} \in V_Y$$

なる GT pattern で与えられる:

$$q^{\varepsilon_j/2} v_Y = q^{f_j/2} v_Y, \qquad X_j^+ v_Y = 0.$$

以前に出てきた $V = \oplus_{j=1}^n \mathrm{C} v_j$ のベクトル v_j は

$$\begin{aligned} v_j &= |m_j\rangle, \\ (m_j)_{ik} &= \delta_{i1} \quad \text{if} \quad j \le k \le n, \\ &= 0 \quad \text{if} \quad 1 \le k \le j-1. \end{aligned}$$

と表される。この n 次元表現を以下ベクトル表現と呼ぶ。

Wigner 係数[2]

$\mathfrak{gl}(n, \mathrm{C})$ の表現の場合と同様に、V を U_q のベクトル表現、V_Y を (深さが n 以下の) Young 図形 Y から定まる U_q の既約表現とするとき $V_Y \otimes V$ の既約成分への分解は次で与えられる。

$$V_Y \otimes V \cong \oplus_W V_W.$$

ここで W は Y に一つます目を余分に付け加えて得られる Young 図形を表す。μ 行目にます目を付け加えて W が得られるとき

$$Y \xrightarrow[\mu]{} W$$

と表すことにする。

$Y \xrightarrow[\mu]{} W$ であるときに、$|m\rangle \in GT(W)$ は、$|m\rangle$ の各行について、その行の数字のうちの高々一つを減らして得られる GT pattern と V のベクトルのテンソル積の一次結合で表される。但し、一行目については μ 番目の数字が 1 だけ減らされ、数字が減らされる行は 1 からある k までの連続した k 行とする。つまり埋め込み $V_W \subset V_Y \otimes V$ に応じて次の形の分解ができる。

$$
\begin{aligned}
|m\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{(i_n=\mu, i_{n-1},\ldots,i_j)} & w_q(m; i_n, i_{n-1}, \ldots, i_j) \\
& \times |m; i_n, i_{n-1}, \ldots, i_j\rangle \otimes v_j. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

ここで $1 \leq i_k \leq k$ であり、$|m'\rangle = |m; i_n, i_{n-1}, \ldots, i_j\rangle \in GT(Y)$ は

$$
\begin{aligned}
m'_{ik} &= m_{i_k k} - 1 \quad j \leq k \leq n \ \text{で} \ i = i_k \ \text{の時、} \\
&= m_{ik} \qquad \text{その他の場合、}
\end{aligned}
$$

で与えられる。係数 $w_q(m; i_n, i_{n-1}, \ldots, i_j)$ は q-Wigner 係数と呼ばれる。これは隣りあう行での分解の様子を記述する reduced Wigner 係数の積として表される。

$$
\begin{aligned}
& w_q(m; i_n, i_{n-1}, \ldots, i_j) \\
&= w_q^{(1)}\left(\begin{matrix} m_{1j} & \cdots & m_{jj} \\ m_{1\,j-1} & \cdots & m_{j-1\,j-1} \end{matrix} \middle| \, i_j \right) \prod_{k=j+1}^{n} w_q^{(2)}\left(\begin{matrix} m_{1k} & \cdots & m_{kk} \\ m_{1\,k-1} & \cdots & m_{k-1\,k-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} i_k \\ i_{k-1} \end{matrix} \right).
\end{aligned}
$$

reduced Wigner 係数は次で与えられる。$f'_1 \geq f_1 \geq f'_2 \geq f_2 \geq \cdots \geq f'_{k-1} \geq f_{k-1} \geq f'_k$ に対し、

$$
\begin{aligned}
w_q^{(1)}\left(\begin{matrix} f'_1 & \cdots & f'_k \\ f_1 & \cdots & f_{k-1} \end{matrix} \middle| \, i \right) &= q^{(\sum_k l_k - \sum_{k \neq i} l'_k - k + 1)/2} \\
& \quad \times \left(\frac{\prod_{a \leq k-1} [l_a - l'_i]_q}{\prod_{a \leq k, a \neq i} [l'_a - l'_i + 1]_q} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
w_q^{(2)}\left(\begin{matrix} f'_1 & \cdots & f'_k \\ f_1 & \cdots & f_{k-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right) &= S(j-i) q^{(l_j - l'_i)/2} \\
& \quad \times \left(\prod_{a \leq k, a \neq i} \frac{[l'_a - l_j + 1]_q}{[l'_a - l'_i + 1]_q} \prod_{a \leq k-1, a \neq j} \frac{[l_a - l'_i]_q}{[l_a - l_j]_q} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

ここで $l_a = f_a - a\ (1 \le a \le k-1)$, $l'_a = f'_a - a\ (1 \le a \le k)$ で

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 \qquad \text{if } x \ge 0, \\ &= -1 \qquad \text{if } x < 0, \end{aligned}$$

である。

$V \otimes V_Y$ に対応する分解の係数は上の公式で $q \longrightarrow q^{-1}$ として与えられる。

前に述べたようにベクトル表現とのテンソル積の際の分解則を繰り返し適用することにより

$$V^{\otimes N} = \bigoplus_{\substack{P \in S(Y) \\ Y \in \mathcal{Y}_N^{(n)}}} V(P)$$

という既約表現への分解が得られる。その各既約成分の $V^{\otimes N}$ への埋め込みの係数は上述の Wigner 係数を用いて表される。$q^{\pm 1} \neq 0$ のときは、それはかなり複雑な式となるが $q^{\pm 1} \longrightarrow 0$ のときは reduced Wigner 係数が簡単なものとなるので、その埋め込みの規則も比較的簡単なものとなる。次にそれについてのべよう。

上の reduced Wigner 係数の具体的な表示式より、計算により次がわかる。

1) $q \to 0$ のとき、次の場合以外の Wigner 係数は 0 となる。

$$\lim_{q \to 0} w_q^{(1)} \left(\begin{matrix} f'_1 \cdots f'_k \\ f_1 \cdots f_{k-1} \end{matrix} \middle| \, i \right) = 1 \qquad f_a = f'_{a+1} \quad (i \le a < k) \text{ の時},$$

$$\begin{aligned} \lim_{q \to 0} w_q^{(2)} \left(\begin{matrix} f'_1 \cdots f'_k \\ f_1 \cdots f_{k-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right) &= 1 \qquad i < j \text{ かつ } f_a = f'_{a+1} \quad (i \le a < j) \text{ の時}, \\ &= 1 \qquad i = j \text{ の時}. \end{aligned}$$

2) $q^{-1} \to 0$ のときは、次の場合以外の Wigner 係数は 0 である。

$$\lim_{q^{-1} \to 0} w_q^{(1)} \left(\begin{matrix} f'_1 \cdots f'_k \\ f_1 \cdots f_{k-1} \end{matrix} \middle| \, i \right) = 1 \qquad i = 1 \text{ の時},$$

$$\begin{aligned} \lim_{q^{-1} \to 0} w_q^{(2)} \left(\begin{matrix} f'_1 \cdots f'_k \\ f_1 \cdots f_{k-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right) &= 1 \qquad i = j \text{ で } f_i = f'_i \text{ の時}, \\ &= -1 \qquad i = j+1 \text{ の時}. \end{aligned}$$

この結果を用いると、$Y \underset{\mu}{\longrightarrow} W$ であるとき、$q^{\pm 1} \to 0$ とすれば、$W \subset V_Y \otimes V$ 又は $V \otimes V_Y$ の埋め込みに対応する $|m\rangle$ の分解式 (4.2) の右辺のうち一項のみが残ることがわかる。この残る一項 $|m'\rangle \otimes v_j$ を記述するために、準標準盤 R に対する deletion と呼ばれる操作について想い出すことにする。

横からの deletion $\leftarrow_\nu R$.

i) R の ν 列目の一番下にあるます目をとり除く。そこに書き込まれている数字を x_ν とする。

ii) $(\nu-1)$ 列目のます目のうち x_ν 以下の数字が書き込まれているます目のうち一番下のます目にある数字を $x_{\nu-1}$ とし、その数字を x_ν で置き換える。

iii) $(\nu-2)$ 列目に ii) の操作を $x_{\nu-1}$ を用いて行う。

iii) の操作を繰り返すことにより最終的に R より一つます目の数の少ない準標準盤が得られる。これを $\leftarrow_\nu R$ と表す。

下からの deletion $R\uparrow_\mu$.

i′) μ 行目の右端のます目を取り除く。そこにある数字を x_μ とする。

ii′) $(\mu-1)$ 行目で x_μ より真に小さい数字の書き込まれたます目のうち最大の数字をもつます目の数字を $x_{\mu-1}$ とする。$x_{\mu-1}$ を x_μ で置き換える。

iii′) $(\mu-2)$ 行目に ii′) の操作を $x_{\mu-1}$ を用いて行う。

この操作を繰り返すことにより得られる準標準盤を $R\uparrow_\mu$ で表す。ここに述べた deletion の操作は、insertion の逆操作である。

さて deletion を用いて $|m'\rangle \otimes v_j$ は次のように定まる。ただし、$Y \underset{\mu}{\longrightarrow} W$ のときに付け加えられるます目が ν 列目にあるものとする。

$$
\begin{aligned}
|m'\rangle &= \tau^{-1}(\leftarrow_\nu R) \quad q \to 0 \text{ の時},\\
|m\rangle' &= \tau^{-1}(R\uparrow_\mu) \quad q^{-1} \to 0 \text{ の時}.
\end{aligned}
$$

また、この deletion の操作により最終的に一つの数字が取り出される。それが j を与える。まとめて、

$$\lim_{q^{\pm 1}\to 0} |m\rangle = \lim_{q^{\pm 1}\to 0} (\pm 1)^{\mu-1} |m'\rangle \otimes v_j .$$

である。

この結果を繰り返し用いて第3節で述べた定理が得られる。

参考文献

[1] 神保 道夫・長谷川 浩司,「可解格子模型とアフィンリー環」数理解析研究所講究録 No.702 (1989).

[2] Pasquier, V., "Etiology of IRF models", Comm. Math. Phys. **118**, 335–364 (1988).

[3] Date, E., Jimbo, M. and Miwa, T., "Representations of $U_q(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}))$ at $q = 0$ and the Robinson-Schensted correspondence", RIMS preprint **656** (1989).

[4] 寺田 至,「Robinson-Schensted 対応とその一族」本講究録.

[5] Jimbo, M., "Quantum R-matrix related to the generalized Toda system: an algebraic approach", Lect. Notes in Phys. **246**, 335–361, Springer 1986.